

48 数学的帰納法

398

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}
 \text{与式左辺} &= 2 \sum_{k=1}^1 (-1)^{k+1} k(k-1) \\
 &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (1-1) \\
 &= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{与式右辺} &= (-1)^{1+1} \cdot 1^2 + \frac{(-1)^1 - 1}{2} \\
 &= 1 \cdot 1 + \frac{-1-1}{2} \\
 &= 1-1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

よって、与式が成り立つ。

(ii) $n=m$ (m は自然数) のとき与式が成り立つと仮定する。

$$\text{仮定より, } 2 \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} k(k-1) = (-1)^{m+1} m^2 + \frac{(-1)^m - 1}{2}$$

 $n=m+1$ のとき

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} k(k-1) &= 2 \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} k(k-1) + 2(-1)^{m+2} (m+1)m \\
 &= (-1)^{m+1} m^2 + \frac{(-1)^m - 1}{2} + 2(-1)^{m+2} (m^2 + m) \\
 &= (-1)^{m+2} \left(\frac{m^2}{-1} \right) + 2(-1)^{m+2} (m^2 + m) + \frac{(-1)^m - 1}{2} \\
 &= (-1)^{m+2} (m^2 + 2m) + \frac{(-1)^m - 1}{2} \\
 &= (-1)^{m+2} \left\{ (m^2 + 1)^2 - 1 \right\} + \frac{(-1)^m - 1}{2} \\
 &= (-1)^{m+2} (m+1)^2 - (-1)^{m+2} + \frac{(-1)^m - 1}{2} \\
 &= (-1)^{m+2} (m+1)^2 + (-1)^{m+1} + \frac{-(-1)^{m+1} - 1}{2} \\
 &= (-1)^{m+2} (m+1)^2 + \frac{(-1)^{m+1} - 1}{2}
 \end{aligned}$$

よって、 $n=m+1$ のときのときも与式が成り立つ。(i), (ii)より、すべての自然数 n に対し与式が成り立つ。

399

α と β は $x^2 - 3x + 5 = 0$ の 2 つの解だから、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 5$$

そこで、これをもとに、

$\alpha^n + \beta^n - 3^n$ が 5 の倍数である $\cdots$ ① がすべての整数 n に対し成り立つことを、
数学的帰納法により、示す。

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - 3 &= 0 \\ &= 5 \cdot 0 \end{aligned}$$

$n=2$ のとき

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 - 3^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 9 \\ &= 3^2 - 2 \cdot 5 - 3^2 \\ &= 5 \cdot (-2) \end{aligned}$$

よって、 $n=1, 2$ で①が成り立つ。

(ii) $n=k, k+1$ (k は正の整数) のとき①が成り立つと仮定する。

仮定より、 $\alpha^k + \beta^k - 3^k = 5l$, $\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} - 3^{k+1} = 5m$ (l, m は整数) とおくと、

$n=k+2$ のとき

$$\begin{aligned} \alpha^{k+2} + \beta^{k+2} - 3^{k+2} &= (\alpha + \beta)(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} - 3^{k+1}) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k) + (\alpha + \beta) \cdot 3^{k+1} - 3^{k+2} \\ &= 3 \cdot 5m - 5(5l + 3^k) + 3^{k+2} - 3^{k+2} \\ &= 5(3m - 5l - 3^k) \end{aligned}$$

これと、 $3m - 5l - 3^k$ が整数であることから、

$\alpha^{k+2} + \beta^{k+2} - 3^{k+2}$ は 5 の倍数である。

したがって、 $n=k+2$ のときも①が成り立つ。

ゆえに、(i), (ii)より、すべての整数 n に対し①が成り立つ。

400

$$(ax+by)^n \leq ax^n + by^n \quad (a, b, x, y \text{ は正の数}) \cdots \textcircled{1}$$

がすべての自然数 n に対し成り立つことを、数学的帰納法により、証明する。

すべての自然数 n とする。

(i) $n=1$ のとき

$$(ax+by)^1 = ax+by, \quad ax^1 + by^1 = ax+by \text{ より, } (ax+by)^1 = ax^1 + by^1$$

よって、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

(ii) $n=k$ (k は自然数) のとき $\textcircled{1}$, すなわち $(ax+by)^k \leq ax^k + by^k$ が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned} (ax+by)^{k+1} &= (ax+by)(ax+by)^k \\ &\leq (ax+by)(ax^k + by^k) \\ &= a^2x^{k+1} + b^2y^{k+1} + ab(xy^k + x^ky) \\ &= a(1-b)x^{k+1} + b(1-a)y^{k+1} + ab(xy^k + x^ky) \\ &= ab(xy^k + x^ky - x^{k+1} - y^{k+1}) + ax^{k+1} + by^{k+1} \\ &= -ab(x-y)(x^k - y^k) + ax^{k+1} + by^{k+1} \end{aligned}$$

ここで、 a, b, x, y は正の数だから、 $-ab < 0$, $x-y$ と $x^k - y^k$ は 0 または同符号

$$\text{より, } -ab(x-y)(x^k - y^k) \leq 0$$

$$\text{よって, } (ax+by)^{k+1} \leq -ab(x-y)(x^k - y^k) + ax^{k+1} + by^{k+1} \leq ax^{k+1} + by^{k+1}$$

したがって、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ が成り立つ。

ゆえに、(i), (ii) より、すべての自然数 n に対し $\textcircled{1}$ が成り立つ。

401

(1)

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 4a_1(1 - a_1) \\
 &= 4\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) \\
 &= 4\sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 &= (2\sin \theta \cos \theta)^2 \\
 &= \sin^2 2\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= 4a_2(1 - a_2) \\
 &= 4\sin^2 2\theta (1 - \sin^2 2\theta) \\
 &= 4\sin^2 2\theta \cos^2 2\theta \\
 &= (2\sin 2\theta \cos 2\theta)^2 \\
 &= \sin^2 4\theta
 \end{aligned}$$

(2)

(1)より, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \sin^2 2^{n-1} \theta$ ($n=1, 2, \dots$)であると予想される。

予想の数学的帰納法による証明

(i) $n=1$ のとき

$$a_n = \sin^2 2^{n-1} \theta \text{ とすると, } a_1 = \sin^2 2^{1-1} \theta = \sin^2 \theta$$

これは与えられた条件 $a_1 = \sin^2 \theta$ と一致する。

よって, $a_n = \sin^2 2^{n-1} \theta$ が成り立つ。

(ii) $n=k$ (k は自然数) のとき $a_n = \sin^2 2^{n-1} \theta$ が成り立つと仮定する。

仮定より, $a_k = \sin^2 2^{k-1} \theta$

これと数列 $\{a_n\}$ の漸化式から,

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= 4a_k(1 - a_k) \\
 &= 4\sin^2 2^{k-1} \theta (1 - \sin^2 2^{k-1} \theta) \\
 &= 4\sin^2 2^{k-1} \theta \cos^2 2^{k-1} \theta \\
 &= (2\sin 2^{k-1} \theta \cos 2^{k-1} \theta)^2 \\
 &= (\sin 2 \cdot 2^{k-1} \theta)^2 \\
 &= \sin^2 2^k \theta
 \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときも $a_n = \sin^2 2^{n-1} \theta$

(i), (ii)より, $a_n = \sin^2 2^{n-1} \theta$ ($n=1, 2, \dots$) が成り立つ。

402

(1)

(i) $n=6$ のとき $2^6=64$, $6^2+7=43$ より, $2^n > n^2+7$ が成り立つ。(ii) $n=k$ (k は 6 以上の整数) のとき $2^n > n^2+7$ が成り立つと仮定する。仮定より, $2^k > k^2+7$ $n=k+1$ のとき,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(k^2+7)$$

また, $2(k^2+7) - \{(k+1)^2+7\} = k^2 - 2k + 6 = (k-1)^2 + 5 > 0$ より, $2(k^2+7) > (k+1)^2+7$ よって, $2^{k+1} > (k+1)^2+7$ より, $n=k+1$ のときも $2^n > n^2+7$ が成り立つ。(i), (ii) より, 6 以上のすべての整数 n に対し $2^n > n^2+7$ が成り立つ。

(2)

 $p \neq 2$ かつ $q \neq 2$ のとき p と q は奇数だから, p^q と q^p は奇数である。よって, q^p+7 は偶数である。ゆえに, $p^q \neq q^p+7$ $p=2$ のとき(1)より, n が 6 以上の整数のとき, $2^n > n^2+7$ であるから, $p^q = q^p+7$ が成り立つ素数 q として, $q=2, 3, 5$ が考えられる。 $q=2$ のとき, $2^2 < 2^2+7$ より, $p^q \neq q^p+7$ ① $q=3$ のとき, $2^3 < 3^2+7$ より, $p^q \neq q^p+7$ $q=5$ のとき, $2^5 = 5^2+7$ より, $p^q = q^p+7$ $q=2$ のとき p が 6 以上の素数のとき, (1)より, $2^p+7 > p^2+7+7 > p^2 \therefore p^q \neq q^p+7$ よって, $p^q = q^p+7$ が成り立つ素数 p として, $p=2, 3, 5$ が考えられる。 $p=2$ のとき, ①より, $p^q \neq q^p+7$ $p=3$ のとき, $3^2 < 2^3+7$ より, $p^q \neq q^p+7$ $p=5$ のとき, $5^2 < 2^5+7$ より, $p^q \neq q^p+7$ 以上より, $p^q = q^p+7$ を満たす素数の組 (p, q) は $(2, 5)$ である。

403

(1)

$$\begin{aligned}
 {}_{19}C_k &= \frac{19!}{k!(19-k)!} \\
 &= \frac{19 \cdot 18 \cdots (19-k+1)}{k!}
 \end{aligned}$$

19 は素数だから、 k ($1 \leq k \leq 18$) 以下のすべての自然数と互いに素である。

よって、19 と $k!$ は互いに素である。

したがって、 ${}_{19}C_k$ ($1 \leq k \leq 18$) が整数であることから、 $\frac{18 \cdots (19-k+1)}{k!}$ は整数である。

よって、 ${}_{19}C_k$ ($1 \leq k \leq 18$) は 19 で割り切れる。

(2)

n を自然数とすると、 $n^{19} - n$ を 19 で割った余りは 0 $\cdots$ ①

①がすべての自然数 n に対して成り立つことを数学的帰納法により証明する。

(i) $n=1$ のとき

$1^{19} - 1 = 0$ および $0 = 19 \cdot 0$ より、①が成り立つ。

(ii) $n=l$ (l は自然数) のとき①が成り立つと仮定する。

仮定より、 $l^{19} - l = 19m$ (m は整数)

$n=l+1$ のとき

$$\begin{aligned}
 (l+1)^{19} - (l+1) &= \sum_{i=0}^{19} {}_{19}C_i l^i - (l+1) \\
 &= \sum_{i=1}^{18} {}_{19}C_i l^i + ({}_{19}C_0 + {}_{19}C_{19} l^{19}) - (l+1) \\
 &= \sum_{i=1}^{18} {}_{19}C_i l^i + l^{19} - l \\
 &= \sum_{i=1}^{18} {}_{19}C_i l^i + 19m
 \end{aligned}$$

ここで、(1)より、 ${}_{19}C_i$ ($1 \leq i \leq 18$) は 19 で割り切れるから、

$\sum_{i=1}^{18} {}_{19}C_i l^i$ は 19 で割り切れる。

よって、 $(l+1)^{19} - (l+1)$ は 19 で割り切れる。

すなわち、 $n=l+1$ のときも①が成り立つ。

(i), (ii)より、すべての自然数 n に対して①が成り立つ。

404

(1)

$$\text{与式より, } (q-s)\sqrt{2} = -p+r \quad \dots \textcircled{1}$$

$$q \neq s \text{ と仮定すると, } \sqrt{2} = \frac{-p+r}{q-s} \quad \dots \textcircled{2}$$

p, q, r, s は整数だから, 右辺すなわち $\frac{-p+r}{q-s}$ は有理数である。

ところが左辺すなわち $\sqrt{2}$ は無理数であるため, ②は成り立たない。

よって, $q=s$

このとき, ①の左辺=0 より, $-p+r=0$ すなわち $p=r$

よって, 題意が成り立つ。

(2)

$$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n \text{ は自然数}) \text{ を満たす整数 } a_n, b_n \text{ が存在する。} \quad \dots \textcircled{1}$$

①がすべての自然数 n に対して成り立つことを数学的帰納法により証明する。

(i) $n=1$ のとき

$$(3+2\sqrt{2})^1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$$

$$\text{これと } (3+2\sqrt{2})^1 = 3+2\sqrt{2} \text{ および(1)より, } a_1=3, b_1=2$$

これより, a_1, b_1 は整数

よって, ①が成り立つ。

(ii) $n=k$ (k は自然数) のとき①が成り立つと仮定する。

$$\text{仮定より, } (3+2\sqrt{2})^k = a_k + b_k\sqrt{2} \text{ において, } a_k, b_k \text{ は整数である。}$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} (3+2\sqrt{2})^{k+1} &= (3+2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^k \\ &= (3+2\sqrt{2})(a_k + b_k\sqrt{2}) \\ &= 3a_k + 4b_k + (2a_k + 3b_k)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{これと } (3+2\sqrt{2})^{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{2} \text{ および(1)より, } a_{k+1} = 3a_k + 4b_k, b_{k+1} = 2a_k + 3b_k$$

a_k, b_k は整数だから, a_{k+1}, b_{k+1} は整数である。

よって, $n=k+1$ のときも①が成り立つ。

(i), (ii)より, すべての自然数 n に対して①が成り立つ。

(3)

 $(x, y) = (a_n, b_n)$ ならば $x^2 - 2y^2 = 1$. . . ① とする。(i) $n=1$ のとき(2)より, $(x, y) = (a_1, b_1) = (3, 2)$

よって, ①が成り立つ。

(ii) $n=l$ のとき①が成り立つと仮定する。仮定より, $x^2 - 2y^2 = 1$ すなわち $a_l^2 - 2b_l^2 = 1$. . . ② $n=l+1$ のとき $x = a_{l+1}, y = b_{l+1}$ より, $x^2 + y^2 = a_{l+1}^2 + b_{l+1}^2$. . . ③(2)より, $a_{l+1} = 3a_l + 4b_l, b_{l+1} = 2a_l + 3b_l$ だから,

これらを③に代入し, 整理していくと,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a_{l+1}^2 + b_{l+1}^2 \\ &= (3a_l + 4b_l)^2 - 2(2a_l + 3b_l)^2 \\ &= a_l^2 - 2b_l^2 \end{aligned}$$

これと②より, $x^2 + y^2 = 1$ よって, $n=l+1$ のときも①が成り立つ。(i), (ii)より, すべての自然数 n について①が成り立つ。

405

推測

 $n=1$ のとき

$$a_1 a_2 = 2(a_1 a_1), \quad a_1 = 1 \text{ より, } a_2 = 2$$

 $n=2$ のとき

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 = 2(a_1 a_2 + a_2 a_1), \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \text{ より, } 2 + 2a_3 = 2(2 + 2) \quad \therefore a_3 = 3$$

よって, $a_n = n$ であることが推測される。

証明

 $a_n = n$ であることを数学的帰納法により証明する。(i) $n=1$ のとき $a_1 = 1$ より, $a_n = n$ が成り立つ。(ii) $n \leq k$ のとき $a_n = n$ が成り立つと仮定する。仮定および $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{k-1} a_k + a_k a_{k+1} = 2(a_1 a_k + a_2 a_{k-1} + \cdots + a_k a_1)$ より,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (k-1)k + k a_{k+1} = 2\{1 \cdot k + 2(k-1) + \cdots + k \cdot 1\}$$

よって,

$$\begin{aligned} k a_{k+1} &= 2\{1 \cdot k + 2(k-1) + \cdots + k \cdot 1\} - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (k-1)k \\ &= 2 \sum_{i=1}^k i(k-i+1) - \sum_{i=1}^{k-1} i(i+1) \\ &= 2 \sum_{i=1}^k i(k-i+1) - \left\{ \sum_{i=1}^k i(i+1) - k(k+1) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^k \{2i(k-i+1) - i(i+1)\} + k(k+1) \\ &= \sum_{i=1}^k \{-3i^2 + (2k+1)i\} + k(k+1) \\ &= -\frac{k(k+1)(2k+1)}{2} + (2k+1) \cdot \frac{k(k+1)}{2} + k(k+1) \\ &= k(k+1) \end{aligned}$$

より, $a_{k+1} = k+1$ よって, $n = k+1$ のときも $a_n = n$ が成り立つ。(i), (ii)より, すべての自然数 n に対して $a_n = n$ が成り立つ。

406

(1)

$$\begin{aligned}
 a_2 &= p^2 \cos 2\theta \\
 &= p^2 (-1 + 2 \cos^2 \theta) \\
 &= p^2 \left\{ -1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^2 \right\} \\
 &= -p^2 + 2
 \end{aligned}$$

(2)

解法 1

$$\cos(n\theta) + \cos\{(n+2)\theta\} = 2 \cos \frac{n\theta - (n+2)\theta}{2} \cos \frac{n\theta + (n+2)\theta}{2} \text{ より,}$$

$$\cos(n\theta) + \cos\{(n+2)\theta\} = 2 \cos \theta \cos\{(n+1)\theta\}$$

両辺に p^{n+2} を掛けると,

$$p^{n+2} [\cos(n\theta) + \cos\{(n+2)\theta\}] = p^{n+2} \cdot 2 \cos \theta \cos\{(n+1)\theta\} \text{ より,}$$

$$p^2 \cdot p^n \cos(n\theta) + p^{n+2} \cos\{(n+2)\theta\} = 2p \cos \theta \cdot p^{n+1} \cos\{(n+1)\theta\}$$

$$\text{よって, } p^{n+2} \cos\{(n+2)\theta\} = 2p \cos \theta \cdot p^{n+1} \cos\{(n+1)\theta\} - p^2 \cdot p^n \cos(n\theta)$$

$$\text{すなわち } a_{n+2} = 2p \cos \theta \cdot a_{n+1} - p^2 a_n$$

$$\text{これと } \cos \theta = \frac{1}{p} \text{ より, } a_{n+2} = 2a_{n+1} - p^2 a_n$$

解法 2

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} &= p^{n+2} \cos\{(n+2)\theta\} \\
 &= p^{n+2} \cos\{(n+1)\theta + \theta\} \\
 &= p^{n+2} [\cos\{(n+1)\theta\} \cos \theta - \sin\{(n+1)\theta\} \sin \theta] \\
 &= p \cos \theta \cdot p^{n+1} \cos\{(n+1)\theta\} - p^{n+2} \sin\{(n+1)\theta\} \sin \theta \\
 &= p \cdot \frac{1}{p} a_{n+1} - p^{n+2} \cdot \frac{1}{2} [\cos\{(n+1)\theta - \theta\} - \cos\{(n+1)\theta + \theta\}] \\
 &= a_{n+1} - \frac{1}{2} p^{n+2} [\cos(n\theta) - \cos\{(n+2)\theta\}] \\
 &= a_{n+1} - \frac{1}{2} p^2 p^n \cos(n\theta) + \frac{1}{2} p^{n+2} \cos\{(n+2)\theta\} \\
 &= a_{n+1} - \frac{1}{2} p^2 a_n + \frac{1}{2} a_{n+2}
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } a_{n+2} = 2a_{n+1} - p^2 a_n$$

(3)

$$a_1 = p^1 \cos \theta = p \cdot \frac{1}{p} = 1, \quad a_2 = -p^2 + 2 \text{ より, } a_1 \text{ と } a_2 \text{ は整数である。}$$

また, a_k, a_{k+1} が整数であると仮定すると, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - p^2 a_n$ より, a_{k+2} も整数である。
よって, a_n はすべての自然数 n に対し整数である。

そこで, a_n は p で割り切れない整数である $\cdots$ ① とする。

(i) $n=1, 2$ のとき

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -p^2 + 2 = p \cdot (-p) + 2, \quad p \text{ は } 3 \text{ 以上の奇数}$$

よって, $n=1, 2$ のとき①が成り立つ。

(ii) $n=k, k+1$ のとき②が成り立つと仮定する。

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - p^2 a_k$$

ここで, a_{k+1} を p で割ったときの商を q_{k+1} , 余りを r_{k+1} とすると,

$$a_{k+1} = pq_{k+1} + r_{k+1} \quad (1 \leq r_{k+1} \leq p-1)$$

これより,

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= 2a_{k+1} - p^2 a_k \\ &= 2(pq_{k+1} + r_{k+1}) - p^2 a_k \\ &= p(2q_{k+1} - pa_k) + 2r_{k+1} \end{aligned}$$

$2r_{k+1}$ は偶数だから, 3 以上の奇数である p で割り切れない。

よって, $n=k+2$ のときも①が成り立つ。

または,

(ii) $n=k, k+1$ のとき②が成り立つと仮定する。

$$a_{k+2} \text{ が } p \text{ で割り切れると仮定すると, } a_{k+2} = pN \quad (N \text{ は整数})$$

これと, $a_{k+2} = 2a_{k+1} - p^2 a_k$ より,

$$\begin{aligned} 2a_{k+1} &= a_{k+2} + p^2 a_k \\ &= p(N + pa_k) \end{aligned}$$

p は奇数だから, 2 と p は互いに素である。

よって, a_{k+1} は p の倍数, すなわち p で割り切れる。

これは, a_{k+1} が p で割り切れないとした仮定と矛盾する。

よって, a_{k+2} は p で割り切れない。すなわち, $n=k+2$ のときも①が成り立つ。

(i), (ii)より, すべての自然数 n に対し①が成り立つ。